МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ МАРКОВА

И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Учебное пособие

Москва, 2022

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

Квадратурные формулы Маркова и их применение в ортогональных разложениях

(Учебное пособие)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Настоящее учебное пособие является вторым в серии учебных пособий, которые предназначены для изучения численно-аналитических методов, построенных на основе ортогональных многочленов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Первое пособие из этой серии (Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Основы применения рядов Чебышёва при построении численно-аналитических методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: НИВЦ МГУ, 2022.) посвящено ортогональным многочленам Чебышёва и рядам Фурье по многочленам Чебышёва, т.е. рядам Чебышёва.

В этом втором пособии рассматриваются некоторые применения ортогональных многочленов — многочленов Чебышёва — в вычислительной математике, а именно при построении квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов и аппроксимации функций с помощью ортогональных разложений. Учебное пособие состоит из шести разделов. В первом разделе дается вывод формулы численного интегрирования Маркова для интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Здесь получены выражения для абсцисс, коэффициентов и остаточного члена квадратурной формулы. Во втором разделе приводится формула Маркова для интегралов вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,.$$

В третьем разделе доказывается сходимость процесса численного интегрирования по формулам Маркова.

В четвертом разделе описывается применение формулы Маркова для приближенного вычисления коэффициентов ряда Чебышёва функции $f(x)$. В пятом разделе изучаются свойства частичной суммы ряда Чебышёва функции $f(x)$ с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова. Доказано, что частичная сумма одновременно является интерполяционным многочленом функции $f(x)$ с узлами интерполирования, совпадающими с абсциссами квадратурной формулы Маркова. Установлена зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова.

В шестом разделе приводятся оценки для погрешности приближения функции частичной суммой ее ряда Чебышева, коэффициенты которого определены по формуле численного интегрирования Маркова.

Вычислительные приемы, изложенные в данном пособии, рассматриваются нами в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов механико-математического факультета МГУ, однако может быть полезно студентам, аспирантам и научным сотрудникам других факультетов МГУ, интересующимся вопросами полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Квадратурная формула Маркова для отрезка $[0,\, 1]$ с одним фиксированным узлом $a_1 = 0$ и весовой функцией $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла

$$\int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx, \tag{1}$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная на $[a,\, b]$ функция, могущая обращаться в нуль лишь в конечном числе точек, и такая, что интеграл $\int\limits_a^b p(x)|x|^m dx$ имеет конечное значение при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Применим квадратурную формулу, содержащую наперед заданные узлы $a_1, \ldots, a_m$ и имеющую вид

$$\int\limits_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) + R(f). \tag{2}$$

Эта формула содержит параметры A_i, x_i, $i = 1, \ldots, n$, и D_l, $l = 1, \ldots, m$. При любом расположении узлов x_i можно за счет выбора коэффициентов A_i и D_l достигнуть того, чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (2) обращался в нуль для всех алгебраических многочленов степени не выше $n+m-1$. Для этого достаточно, чтобы эта формула была интерполяционной. Для того чтобы остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы (2) обращался в нуль для многочленов более высокой степени, необходимо специальным образом выбирать узлы x_i. В (2) коэффициенты A_i, D_l и узлы x_i выбирают таким образом, чтобы $R(f)$ обращался в нуль для многочленов возможно более высокой степени.

Обозначим

$$\Omega(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_m), \qquad \omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Справедлива следующая

Теорема. *Для того чтобы квадратурная формула*

$$\int\limits_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{l=1}^{m} D_l f(a_l) \tag{3}$$

была точной для многочленов степени $2n+m-1$, необходимо и достаточно, чтобы формула была интерполяционной и чтобы многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a,\,b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ к любому многочлену $q(x)$ степни, не превосходящей $n-1$.

Доказательство теоремы приведено в [1].

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\,b]$ производную порядка $2n+m$, то остаточный член $R(f)$ квадратурной формулы принимает вид [1]

$$R(f) = \int\limits_a^b p(x)\Omega(x)\omega^2(x)\,\frac{f^{(2n+m)}\big(\xi(x)\big)}{(2n+m)!}\,dx, \qquad a<\xi(x)<b. \tag{4}$$

Из теоремы следует, что для построения квадратурной формулы (2) при любом n необходимо построить многочлен $\omega(x)$, ортогональный на отрезке $[a,\,b]$ с весом $p(x)\Omega(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$.

Теперь рассмотрим квадратурную формулу частного вида, а именно формулу численного интегрирования Маркова. Пусть $m=1$ и $a_1=a$. Тогда квадратурная формула (2) примет вид

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx = D\cdot f(a) + \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f). \tag{5}$$

Алгебраический порядок точности этой формулы равен $2n$. Многочлен $\omega(x)$ принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[a,\,b]$ с весом $\rho(x)=(x-a)p(x)$. Обозначим через $P_s(x)$, $s=0,1,\,\ldots\,$, ортонормированную на отрезке $[a,\,b]$ с весом $p(x)$ систему многочленов, а через $\Pi_s(x)$, $s=0,1,\,\ldots\,$, — систему многочленов, ортонормированную на том же отрезке $[a,\,b]$, но с другим весом $\rho(x)=(x-a)p(x)$ (s — степень многочленов $P_s(x)$ и $\Pi_s(x)$). Воспользуемся формулой преобразования ортогональной системы многочленов $P_s(x)$ при умножении веса $p(x)$ на многочлен $x-a$ (см. гл. 9, § 1, § 2 в [1]):

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{x-a}\big(P_{n+1}(x)P_n(a) - P_n(x)P_{n+1}(a)\big), \tag{6}$$

где $K_n=\mathrm{const}\neq 0$. Многочлен $\omega(x)$ только постоянным множителем отличается от $\Pi_n(x)$. Пусть α_n — старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ степени n:

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \,\ldots\,. \tag{7}$$

Тогда для коэффициентов A_i и D справедливы такие формулы (см. (9.2.2) и (9.2.3) в [1]):

$$A_i = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x_i-a)\Pi_n'(x_i)\Pi_{n-1}(x_i)}\,, \qquad i=1,2,\,\ldots\,,n, \tag{8}$$

$$D = \frac{1}{\Pi_n(a)} \int\limits_a^b p(x)\Pi_n(x)dx. \tag{9}$$

Выражение $\Pi'_n(x_i)$ в (8) обозначает значение производной многочлена $\Pi_n(x)$ в точке x_i.

Предположим, что

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{10}$$

и отрезок $[a,\, b]$ совпадает с отрезком $[0, 1]$. Тогда квадратурная формула Маркова (5) может быть записана в форме

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)}} = D \cdot f(0) + \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R(f). \tag{11}$$

Построим систему многочленов $\Pi_s(x)$, ортонормированную на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,. \tag{12}$$

1.1. Система многочленов, ортонормированная на отрезке $[0,\, 1]$ с весом $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. Многочленами $P_s(x)$, ортогональными на отрезке $[0, 1]$ с весом (10), являются смещенные многочлены Чебышёва первого рода

$$T_s^*(x) = T_s(2x-1), \qquad s = 0, 1, \ldots\,.$$

Подставляя в (6) смещенные многочлены Чебышёва и учитывая равенства

$$T_s^*(0) = T_s(-1) = (-1)^s, \qquad s = 0, 1, \ldots\,, \tag{13}$$

имеем (в дальнейшем вместо буквы s в качестве индекса многочлена T_s будем писать букву n):

$$\Pi_n(x) = K_n \frac{T^*_{n+1}(x)(-1)^n - T^*_n(x)(-1)^{n+1}}{x} = (-1)^n K_n \frac{T^*_{n+1}(x) + T^*_n(x)}{x}\,. \tag{14}$$

Получим для многочлена $\Pi_n(x)$ простое выражение через тригонометрические функции. Выразим сначала $\Pi_n(x)$ через обычные многочлены Чебышёва. Сделаем замену переменной

$$x = \frac{1+y}{2}\,, \qquad y \in [-1,\, 1].$$

Тогда
$$\Pi_n\Big(\frac{1+y}{2}\Big) = (-1)^n 2K_n \frac{T_{n+1}(y)+T_n(y)}{1+y}\,.$$
Положим $y=\cos\varphi$; тогда, учитывая равенство $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$, имеем
$$\begin{gathered}\Pi_n\Big(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Big) = (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi}{1+\cos\varphi} = \\ = (-1)^n 2K_n \frac{2\cos(n+1/2)\varphi\cdot\cos\varphi/2}{2\cos^2\varphi/2} = (-1)^n 2K_n \frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos\varphi/2}\,.\end{gathered} \tag{15}$$
При замене переменной
$$x=\frac{1+\cos\varphi}{2} \tag{16}$$
весовая функция $\rho(x)$ (12) примет вид
$$\begin{gathered}\rho\Big(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Big) = \sqrt{\frac{\frac{1+\cos\varphi}{2}}{1-\frac{1+\cos\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \\ = \frac{\cos\varphi/2}{\sin\varphi/2} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\,.\end{gathered} \tag{17}$$
Найдем коэффициент K_n в выражении (14) для $\Pi_n(x)$. Так как $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0,1]$ с весом $\rho(x)$ (12) многочлен, то должно выполняться равенство
$$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\Pi_n^2(x)\,dx = 1. \tag{18}$$
Вычислим интеграл с помощью замены переменной (16). Учитывая (15), (17), имеем
$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\Pi_n^2(x)\,dx = -4K_n^2 \int\limits_\pi^0 \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\cos^2(n+1/2)\varphi}{\cos^2\varphi/2}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}\,d\varphi = \\ = 2K_n^2 \int\limits_0^\pi \big(1+\cos(2n+1)\varphi\big)\,d\varphi = 2\pi K_n^2.\end{gathered}$$
Отсюда и из (18) получаем
$$K_n^2 = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad K_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{19}$$

Так как K_n от n не зависит, то индекс n в K_n будем в дальнейшем опускать.

Итак, система многочленов, ортонормированная на отрезке $[0,1]$ с весом (12), задается следующими формулами через смещенные многочлены Чебышёва:

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K\,\frac{T^*_{n+1}(x) + T^*_n(x)}{x}\,, \qquad n = 0, 1, \ldots; \tag{20}$$

и через обычные многочлены Чебышёва:

$$\Pi_n(x) = (-1)^n K\,\frac{T_{n+1}(2x-1) + T_n(2x-1)}{x}\,, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{21}$$

При условии

$$x = \frac{1+\cos\varphi}{2}$$

имеем простое выражение $\Pi_n(x)$ через тригонометрические функции:

$$\Pi_n(x) = \Pi_n\Bigl(\frac{1+\cos\varphi}{2}\Bigr) = (-1)^n 2K\,\frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos\varphi/2}\,, \qquad n = 0, 1, \ldots. \tag{22}$$

Из (21) находим, что старший коэффициент многочлена $\Pi_n(x)$ равен

$$\alpha_n = (-1)^n K 2^{(n+1)-1} \cdot 2^{n+1} = (-1)^n K 2^{2n+1}. \tag{23}$$

Формула (22) нам потребуется для определения узлов квадратурной формулы Маркова (11). Формулы (20), (22), (23) нам понадобятся также для нахождения коэффициентов формулы Маркова (11).

Заметим, что многочлен $\dfrac{\Pi_n(x)}{\alpha_n}$ совпадает с многочленом Якоби n-й степени $G_n(p,q,x)$ из системы многочленов, ортогональной на отрезке $[0,1]$ с весовой функцией $(1-x)^{p-q}\cdot x^{q-1}$, а именно

$$\frac{\Pi_n(x)}{\alpha_n} = G_n\Bigl(1, \frac{3}{2}, x\Bigr). \tag{24}$$

Многочлены $G_n\Bigl(1, \dfrac{3}{2}, x\Bigr)$ ортогональны на отрезке $[0,1]$ с весом $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ (см. формулу 22.2.2 при $p=1$, $q=3/2$ в [2]). Для многочленов $G_n(p,\,q,\,x)$ справедливо функциональное соотношение (см. формулу 22.5.2 в [2])

$$G_n(p,q,x) = \frac{n!\Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+p)}\,P_n^{(p-q,q-1)}(2x-1), \tag{25}$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(y)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,\,1]$ с весом $(1-y)^\alpha(1+y)^\beta$ и равные

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(y)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-y)^{-\alpha}(1+y)^{-\beta}\frac{d^n}{dy^n}\Big[(1-y)^{\alpha+n}(1+y)^{\beta+n}\Big],\quad \alpha,\beta>-1 \tag{26}$$

(см. формулу 22.11.1 в [2]).

Полагая $p=1$ и $q=3/2$, получаем

$$G_n\Big(1,\frac{3}{2},x\Big)=\frac{n!\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}\,P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1), \tag{27}$$

$$P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1)=\frac{(-1)^n}{n!}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\frac{d^n}{dx^n}\big[(1-x)^{n-1/2}x^{n+1/2}\big]. \tag{28}$$

Таким образом, формулы (22), (24), (27) дают для многочлена Якоби (28) простое выражение через тригонометрические функции.

1.2. Абсциссы формулы Маркова. Найдем корни многочлена $\Pi_n(x)$. Воспользуемся его выражением через тригонометрические функции (22). Из (22) имеем

$$\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi=0,$$

$$\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi=-\frac{\pi}{2}+\pi i,\qquad i=1,2,\,\dots\,,$$

$$\varphi=\frac{-\dfrac{\pi}{2}+\pi i}{n+\dfrac{1}{2}}=\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,,\qquad i=1,2,\,\dots\,.$$

Итак, корни многочлена $\Pi_n(x)$, а значит, и абсциссы x_i, $i=1,2,\,\dots\,,n$, квадратурной формулы Маркова (11) имеют вид

$$x_i=\frac{1+\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}\,,\qquad i=1,2,\,\dots\,,n. \tag{29}$$

Заметим, что абсциссы (29) квадратурной формулы Маркова (11) являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$:

$$U^*_{2n}(x)=U_{2n}(2x-1). \tag{30}$$

Здесь $U_s(x)$ — многочлен Чебышёва второго рода s-й степени, который при $|x|<1$ может быть записан в форме

$$U_s(x)=\frac{\sin\big((s+1)\arccos x\big)}{\sqrt{1-x^2}}\,,\qquad s=0,1,\,\dots\,. \tag{31}$$

Нули многочлена Чебышёва второго рода $U_s(x)$ равны

$$u_{sj} = \cos\frac{j\pi}{s+1}\,, \qquad s \geqslant 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, s; \tag{32}$$

нули смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_s^*(x)$ равны

$$u_{sj}^* = \frac{1+u_{sj}}{2} = \frac{1+\cos\dfrac{j\pi}{s+1}}{2}\,, \qquad s \geqslant 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, s \tag{33}$$

(см., например, теорему 4.1. в [3]).

1.3. Коэффициенты формулы Маркова. Коэффициент D квадратурной формулы Маркова (11) вычисляем по формуле (9).

Для отыскания $\Pi_n(0)$ нельзя применить формулу (20) непосредственно, так как при $x = 0$ эта формула содержит неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поэтому для вычисления $\Pi_n(0)$ применим первое правило Лопиталя. При этом нам потребуется формула для производной смещенного многочлена Чебышёва

$$\big(T_n^*(x)\big)' = 2n \cdot U_{n-1}^*(x). \tag{34}$$

Эта формула следует из формулы (13) в теореме 1.2. в [3]:

$$T_n'(x) = nU_{n-1}(x). \tag{35}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие формулы для значений многочлена Чебышёва второго рода:

$$U_n^*(0) = U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n \cdot (n+1), \quad U_n(1) = n+1, \tag{36}$$

которые вытекают из (17), (19) в теореме 4.4. в [3] при $m = 0$ (см. также формулы (1.6.13) и (1.6.14) в [4]. По правилу Лопиталя находим

$$\begin{aligned}
\Pi_n(0) &= (-1)^n K \lim_{x\to 0}\big(T_{n+1}^*(x) + T_n^*(x)\big)' = \\
&= (-1)^n K \lim_{x\to 0}\big[2(n+1)U_n^*(x) + 2nU_{n-1}^*(x)\big] = \\
&= (-1)^n 2K\big[(n+1)U_n^*(0) + nU_{n-1}^*(0)\big] = \\
&= (-1)^n 2K\big[(n+1)^2(-1)^n + n^2(-1)^{n-1}\big] = 2K(2n+1).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\Pi_n(0) = 2K(2n+1). \tag{37}$$

Теперь рассмотрим интеграл в (9). Вычислим его с помощью замены переменной $x = 1 + y/2$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 p(x)\Pi_n(x)dx &= (-1)^n K \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot \frac{T^*_{n+1}(x) + T^*_n(x)}{x}\, dx = \\ &= (-1)^n 2K \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(y) + T_n(y)}{(1+y)\sqrt{1-y^2}}\, dy.\end{aligned} \tag{38}$$

Интеграл в (38) содержит ортогональные многочлены Чебышёва первого рода. Для его вычисления воспользуемся формулой 22.13.3 в [2]:

$$V.p. \int_{-1}^1 \frac{T_n(y)\, dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = \pi U_{n-1}(x). \tag{39}$$

Полагая в (39) $x = -1$, находим

$$\begin{aligned}\int_0^1 p(x)\Pi_n(x)dx &= (-1)^n 2K\pi\big(U_n(-1) + U_{n-1}(-1)\big) = \\ &= (-1)^n 2K\pi\big[(-1)^n(n+1) + (-1)^{n-1}n\big] = 2K\pi.\end{aligned} \tag{40}$$

Подставляя (37), (40) в (9), окончательно находим коэффициент D:

$$D = \frac{\pi}{2n+1}\,. \tag{41}$$

Для вычисления коэффициентов A_i квадратурной формулы (11) обратимся к (8).

Найдем сначала производную $\Pi'_n(x_i)$. Из формулы (20), учитывая, что x_i — корень многочлена $\Pi_n(x)$, находим

$$\begin{aligned}\Pi'_n(x_i) &= (-1)^n K\, \frac{T^{*\prime}_{n+1}(x_i) + T^{*\prime}_n(x_i)}{x_i} = \\ &= (-1)^n 2K\, \frac{(n+1)U_n(2x_i - 1) + nU_{n-1}(2x_i - 1)}{x_i}\,.\end{aligned} \tag{42}$$

Из (29) следует

$$2x_i - 1 = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,, \qquad x_i = \cos^2\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}\,. \tag{43}$$

Значения многочленов Чебышёва второго рода в (42) могут быть получены по формуле (31):

$$U_n(2x_i-1)=\frac{\sin\dfrac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}\,, \tag{44}$$

$$U_{n-1}(2x_i-1)=\frac{\sin\dfrac{n(2i-1)\pi}{2n+1}}{\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}\,. \tag{45}$$

Упростим числитель в (44), (45):

$$\begin{aligned}\sin\frac{(n+1)(2i-1)\pi}{2n+1}&=\sin\frac{(2n+2)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}=\sin\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}+\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}\right]=\\&=(-1)^{i-1}\cdot\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}=(-1)^{i-1}\sqrt{x_i},\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{n(2i-1)\pi}{2n+1}&=\sin\frac{2n(2i-1)\pi}{2(2n+1)}=\sin\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}-\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}\right]=\\&=(-1)^{i-1}\cdot\cos\frac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}=(-1)^{i-1}\sqrt{x_i}.\end{aligned} \tag{47}$$

В (46), (47) мы учли второе равенство из (43). Подставляя (44)–(47) в (42), приходим к следующему значению производной многочлена $\Pi_n'(x_i)$:

$$\Pi_n'(x_i)=(-1)^{n+i-1}\cdot 2K(2n+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x_i}\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}\,. \tag{48}$$

Теперь найдем значение многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$. Воспользуемся представлением $\Pi_{n-1}(x_i)$ через тригонометрические функции. Заменяя в (22) n на $n-1$, имеем

$$\begin{aligned}\Pi_{n-1}(x_i)=\Pi_{n-1}\left(\frac{1+\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}\right)&=(-1)^{n-1}2K\frac{\cos\dfrac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}=\\&=(-1)^{n-1}2K\frac{\cos\dfrac{(2n-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}}{\sqrt{x_i}}\,.\end{aligned}$$

Упростим числитель и получим окончательное выражение для значения многочлена $\Pi_{n-1}(x_i)$:

$$\begin{aligned}\Pi_{n-1}(x_i) &= (-1)^{n-1}2K\frac{1}{\sqrt{x_i}}\cos\Big[(2i-1)\frac{\pi}{2}-\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\Big] = \\ &= (-1)^{n+i}2K\frac{1}{\sqrt{x_i}}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2n+1}\,.\end{aligned} \tag{49}$$

Отношение старших коэффициентов $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ находим с учетом (23):

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = -4. \tag{50}$$

Подставляя (48), (49) и (50) в (8), находим коэффициент A_i:

$$\begin{aligned}A_i &= -4\cdot\frac{1}{x_i}\cdot\frac{(-1)^{n+i-1}\sqrt{x_i}\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2K(2n+1)}\cdot\frac{(-1)^{n+i}\sqrt{x_i}}{2K\sin\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}} = \\ &= \frac{1}{K^2(2n+1)}\,.\end{aligned} \tag{51}$$

Итак, мы доказали, что коэффициенты A_i квадратурной формулы Маркова (11) равны между собой:

$$A_i = \frac{2\pi}{2n+1}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{52}$$

1.4. Остаточный член формулы Маркова. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $2n+1$, то остаточный член $R(f)$ формулы (11), согласно (4) и формуле среднего значения, может быть представлен в виде

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_0^1\frac{x\omega^2(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\omega^2(x)\,dx, \qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1. \tag{53}$$

Напомним, что многочлен $\omega(x)$ степени n принадлежит системе многочленов, ортогональных на отрезке $[0,1]$ с весом

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,.$$

Многочлен $\omega(x)$ отличается от многочлена $\Pi_n(x)$ (20) только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента α_n, а именно

$$\omega(x) = \frac{1}{\alpha_n}\,\Pi_n(x) \tag{54}$$

и

$$R(f) = \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\Pi_n^2(x)\,dx, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{55}$$

Многочлен $\Pi_n(x)$ — ортонормированный на отрезке $[0,1]$ с весом (12); интеграл в (55), являющийся квадратом нормы этого многочлена, равен 1 (см. формулу (18)). Тем самым, с учетом (23) и (19), можно записать

$$R(f) = \frac{1}{\alpha_n^2} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} = \frac{2\pi}{2^{4n+2}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\,, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{56}$$

Таким образом, квадратурная формула Маркова (11) для отрезка $[0,1]$ с одним наперед заданным узлом $a_1 = 0$ и весовой функцией

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

имеет вид

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2n+1}f(0) + \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}} \cdot \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\,, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{57}$$

или

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2\pi}{2n+1}{\sum_{i=0}^{n}}{}' f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\,, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{58}$$

Штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$. Абсциссы квадратуры (58) вычисляются по формулам:

$$x_0 = 0, \tag{59}$$

$$x_i = \frac{1 + \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}\,, \qquad i = 1, 2, \, \ldots \, , n. \tag{60}$$

Узлы x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются нулями многочлена Якоби $G_n\Bigl(1,\, \dfrac{3}{2},\, x\Bigr)$ или многочлена $P_n^{(-1/2,1/2)}(2x-1)$ (см. формулы (27), (28)) и совпадают с нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода степени $2n$:

$$U_{2n}^*(x) = U_{2n}(2x-1).$$

Алгебраическая степень точности формулы (58) равна $2n$.

2. Формула Маркова для интегралов $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$. Приведем отрезок интегрирования $[a,\, b]$ к отрезку $[0, 1]$ линейным преобразованием

$$x = (b-a)\alpha + a, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{61}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}\,. \tag{62}$$

При преобразовании (61) функция

$$h(x) = \frac{b-a}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{63}$$

преобразуется в функцию

$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\,. \tag{64}$$

Применяя замену переменной (61), запишем интеграл в следующем виде:

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \int\limits_0^1 \frac{f\bigl[(b-a)\alpha + a\bigr]}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha. \tag{65}$$

Вычисляя интеграл по отрезку $[0, 1]$ от функции $\varphi(\alpha) = f\bigl[(b-a)\alpha + a\bigr]$ переменной α с помощью (58) и применяя для определения остаточного члена $R(\varphi)$ правило дифференцирования сложной функции

$$\varphi^{(2n+1)}(\alpha) = (b-a)^{2n+1} f^{(2n+1)}\bigl[(b-a)\alpha + a\bigr], \tag{66}$$

получаем квадратурную формулу Маркова следующего вида:

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}(b-a)^{2n+1}\,\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\,, \quad a \leqslant \eta \leqslant b, \tag{67}$$

Абсциссы квадратуры (67) имеют вид

$$x_0 = a, \tag{68}$$

$$x_i = (b-a)\alpha_i + a, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{69}$$

$$\alpha_i = \frac{1 + \cos\dfrac{(2i-1)\pi}{2n+1}}{2}\,, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{70}$$

Для весовой функции (63) квадратурная формула будет иметь вид

$$\int\limits_a^b \frac{(b-a)f(x)dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \frac{2\pi(b-a)}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_i) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}(b-a)^{2n+2}\,\frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\,, \quad a \leqslant \eta \leqslant b. \tag{71}$$

3. Сходимость процесса численного интегрирования по формулам Маркова. Обозначим через $Q_n(f)$ квадратурную сумму в (67):

$$Q_n(f) = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{i=0}^{n}{}' f(x_i^{(n)}), \tag{72}$$

где $x_i^{(n)} = x_i$ (x_i определены по формулам (68)—(70)), а через $I(f)$ — интеграл в (67):

$$I(f) = \int\limits_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,. \tag{73}$$

Докажем, что *для любой непрерывной на* $[a,\, b]$ *функции* $f(x)$ *квадратурный процесс по формулам Маркова*

$$I(f) = Q_n(f) + R_n(f), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{74}$$

сходится, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = I(f). \tag{75}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\, b]$, то по теореме Вейерштрасса (см., например, гл. 4, § 3, п. 1 в [6]) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a,\, b]$ будет выполняться неравенство

$$\bigl|f(x) - P(x)\bigr| < \varepsilon.$$

Пусть m — степень этого многочлена. Рассмотрим остаток квадратуры (74) при $2n \geqslant m$:

$$R_n(f) = I(f) - Q_n(f) = \bigl[I(f) - I(P)\bigr] + \bigl[I(P) - Q_n(P)\bigr] + \bigl[Q_n(P) - Q_n(f)\bigr]. \quad (76)$$

Абсолютная величина первого слагаемого не превышает

$$\varepsilon \int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \varepsilon\pi.$$

Так как степень многочлена $P(x)$ не превосходит алгебраической степени точности квадратурной формулы (74), то $I(P) = Q_n(P)$, и второе слагаемое в (76) равно нулю. Абсолютная величина третьего слагаемого (76) также не превышает $\varepsilon\pi$. Отсюда получаем, что

$$\bigl|R_n(f)\bigr| = \bigl|I(f) - Q_n(f)\bigr| < 2\varepsilon\pi.$$

Следовательно, остаток квадратуры $R_n(f)$ может быть сделан сколь угодно малым. Это доказывает существование предела (75), а значит, и сходимость квадратурного процесса, определяемого равенством (74).

4. Вычисление коэффициентов смещенного ряда Чебышёва по формуле Маркова. Для функции

$$f(x) \in L_2\Bigl(0, 1; \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\Bigr)$$

рассмотрим смещенный ряд Чебышёва

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \quad (77)$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_i^*(x)\, dx, \qquad i = 0, 1, \ldots . \quad (78)$$

В (77) использовано обозначение

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m, \qquad m \geqslant l. \tag{79}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывную производную порядка $2n+1$. Применим квадратурную формулу Маркова (58) для вычисления интеграла (78), принимая в качестве интегрируемой функции произведение $f(x)T_i^*(x)$:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}{}' f(x_j)T_i^*(x_j) + \frac{\pi}{2^{4n+1}}\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}\Big]$$

или

$$a_i^* = \frac{4}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}{}' f(x_j)T_i^*(x_j) + R(f\cdot T_i^*), \qquad i = 0, 1, \ldots, \tag{80}$$

где

$$R(f\cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4n}}\frac{(f\cdot T_i^*)^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{81}$$

Абсциссы x_j, входящие в (80), запишем в виде

$$x_0 = 0, \qquad x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2n+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{82}$$

Значения смещенного многочлена Чебышёва в (80) равны:

$$T_i^*(0) = T_i(-1) = (-1)^i, \tag{83}$$

$$T_i^*(x_j) = T_i(2x_j - 1) = \cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{84}$$

Подставим (83), (84) в (80):

$$a_i^* = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x)T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{(-1)^i 2}{2n+1}f(0) + \frac{4}{2n+1}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1}f(x_j) + R(f\cdot T_i^*),$$
$$i = 0, 1, \ldots. \tag{85}$$

Отбрасывая остаточный член $R(f \cdot T_i^*)$, получаем приближенное значение коэффициента a_i^* смещенного ряда Чебышёва:

$$a_i^* = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx \approx \frac{(-1)^i 2}{2n+1} f(0) + \frac{4}{2n+1} \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{i(2j-1)\pi}{2n+1} f(x_j) \qquad (86)$$
$$i = 0, 1, \ldots .$$

Формула (86) будет давать точное значение коэффициента Чебышёва a_i^* функции $f(x)$, если $f(x)$ является многочленом степени не выше $2n - i$.

Предположим, что $f(x)$ — многочлен степени k. Ряд Чебышёва многочлена степени k тождественно совпадает со своей k-й частичной суммой и многочлен $f(x)$ будет равен этой частичной сумме

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^* \cdot T_i^*(x).$$

Здесь $a_k^* \cdot T_k^*(x)$ — член ряда Чебышёва с максимальным номером, содержащийся в частичной сумме, a_k^* — коэффициент Чебышёва с максимальным номером, входящий в частичную сумму. При вычислении a_k^* под знаком интеграла в (86) будет многочлен $f(x) T_k^*(x)$ степени $2k$. Для того чтобы коэффициент a_k^* вычислялся точно по квадратурной формуле Маркова (86), необходимо, чтобы алгебраическая степень точности квадратуры (86) была не менее $2k$, т.е.

$$2n \geqslant 2k, \quad n \geqslant k. \qquad (87)$$

Поэтому число нефиксированных узлов квадратурной формулы (86) должно быть не менее степени многочлена $f(x)$, или, другими словами, не менее максимального номера коэффициента Чебышёва.

5. Частичная сумма смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по формуле Маркова. Рассмотрим k-ю частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$

$$S_k(x, f) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \quad k > 0. \qquad (88)$$

Пусть коэффициенты a_i^* вычислены по квадратурной формуле Маркова (80) или (86) с числом нефиксированных узлов $n = k$. Подставляя квадратурную сумму (80) при $n = k$ в (88), получим

$$J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f(x_j) T_i^*(x_j) \Big) \cdot T_i^*(x), \qquad (89)$$

где

$$x_0 = 0, \tag{90}$$

$$x_j = \frac{1 + \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{91}$$

Напомним, что x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва U_{2k}^* второго рода (30) степени $2k$, а числа

$$u_{2k,2j-1} = 2x_j - 1 = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{92}$$

являются нечетными нулями обычного многочлена Чебышёва второго рода (31).

Для дальнейшего нам понадобится тождество для смещенных многочленов Чебышёва первого рода.

5.1. Тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу для обычных многочленов Чебышёва $T_i(x)$ (см. формулу (51) в теореме 2.8 в [3] при $n = k$):

$$2(x-y){\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i(x)T_i(y) = T_{k+1}(x)T_k(y) - T_k(x)T_{k+1}(y). \tag{93}$$

Положим $x = 2t - 1$, $y = 2\tau - 1$. Тогда $x - y = 2(t - \tau)$. Подставим в (93) и, учитывая, что $T_i(2t-1) = T_i^*(t)$, получим

$$4(t-\tau){\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(t)T_i^*(\tau) = T_{k+1}^*(t)T_k^*(\tau) - T_k^*(t)T_{k+1}^*(\tau).$$

Заменим в полученном равенстве t на x, τ на y:

$$4(x-y){\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(x)T_i^*(y) = T_{k+1}^*(x)T_k^*(y) - T_k^*(x)T_{k+1}^*(y). \tag{94}$$

Это и есть тождество Кристоффеля–Дарбу для смещенных многочленов Чебышёва первого рода. Формулу (94) можно записать в виде

$$4(x-y){\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i(2x-1)T_i(2y-1) = T_{k+1}(2x-1)T_k(2y-1) - T_k(2x-1)T_{k+1}(2y-1). \tag{95}$$

5.2. Связь частичной суммы ряда Чебышёва с интерполированием. Частичная сумма (89) смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ представляет собой многочлен степени k.

В следующей теореме говорится о свойстве этого многочлена.

Теорема 1. *Пусть все коэффициенты k-й частичной суммы* (88) *смещенного ряда Чебышёва* (77) *функции $f(x)$ вычислены по одной и той же квадратурной формуле Маркова* (80) *с числом нефиксированных узлов $n = k$; пусть многочлен $J_k(x)$ представляет полученную таким образом частичную сумму* (89). *Тогда многочлен $J_k(x)$ является интерполяционным многочленом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_j, $j = 0, 1, \dots, k$, определенными формулами* (90), (91).

Доказательство. Преобразуем формулу (89) к виду

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{4}{2k+1}\Bigl(\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x)\Bigr) f(x_j). \tag{96}$$

Докажем, что многочлен (96) является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$ с узлами интерполирования x_0, x_j, $j = 1, 2, \dots, k$, определяемыми формулами (90), (91).

Вычислим выражение

$$Q_j(x) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x) \tag{97}$$

при $x = x_l$, $l = 0, 1, \dots, k$.

Случай 1. Пусть $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$. Значение суммы в (97) найдем, если воспользуемся тождеством Кристоффеля–Дарбу (94), (95) при $x = x_j$ и $y = x_l$:

$$\begin{aligned} 4(x_j - x_l)\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = T_{k+1}\Bigl(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Bigr)\cdot T_k\Bigl(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Bigr) - \\ - T_k\Bigl(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Bigr)\cdot T_{k+1}\Bigl(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Bigr). \end{aligned} \tag{98}$$

Выразим значения многочленов Чебышёва в правой части (98) через тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} T_{k+1}\Bigl(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Bigr) = \cos\frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} = \cos\Bigl(j\pi + \frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\Bigr) = \\ = (-1)^j \cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\,, \end{aligned}$$

$$T_k\Big(\cos\frac{(2l-1)\pi}{2k+1}\Big) = \cos\frac{k(2l-1)\pi}{2k+1} = \cos\Big(l\pi - \frac{(l+k)\pi}{2k+1}\Big) =$$
$$= (-1)^l\cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1}\,.$$

Правая часть в (98) будет равна

$$(-1)^{j+l}\cos\frac{(j-k-1)\pi}{2k+1}\cos\frac{(l+k)\pi}{2k+1} - (-1)^{j+l}\cos\frac{(l-k-1)\pi}{2k+1}\cos\frac{(j+k)\pi}{2k+1}\,.$$

Преобразуем произведение косинусов в сумму косинусов и получим следующее значение для правой части (98):

$$(-1)^{j+l}\frac{1}{2}\Big[\cos\frac{(-2k-1+j-l)\pi}{2k+1} - \cos\frac{(-2k-1+l-j)\pi}{2k+1} =$$
$$= (-1)^{j+l}\frac{1}{2}\Big[\cos\Big(-\pi+\frac{(j-l)\pi}{2k+1}\Big) - \cos\Big(-\pi+\frac{(l-j)\pi}{2k+1}\Big)\Big] = 0.$$

Следовательно, левая часть в (98) равна нулю, т.е.

$$(x_j - x_l){\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(x_l) = 0.$$

В этом равенстве $x_j \neq x_l$, так как по предположению $j \neq l$. Следовательно, сумма в левой части формулы (98) равна нулю. Значит, $Q_j(x_l) = 0$ при $l \neq j$, $j \neq 0$ и $l \neq 0$.

Случай 2. Пусть $l = 0$, $j \neq 0$. Тогда сумма в (97) при $x = x_0$ будет равна

$${\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(x_j)T_i^*(0) = {\sum_{i=0}^{k}}{}'(-1)^i T_i^*(x_j) = {\sum_{i=0}^{k}}{}'(-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big). \tag{99}$$

Введем обозначение

$${\sum_{i=l}^{m}}{}'' a_i = \frac{1}{2}a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{m-1} + \frac{1}{2}a_m, \qquad m > l. \tag{100}$$

Сумму с одним штрихом в (99) преобразуем в сумму с двумя штрихами:

$$\begin{aligned}{\sum_{i=0}^{k}}{}'(-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) &= {\sum_{i=0}^{k}}{}''(-1)^i T_i\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) + \\ &+ \frac{1}{2}(-1)^k T_k\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big).\end{aligned} \tag{101}$$

Воспользуемся тождеством (63) из теоремы 2.8. в [3]:

$$\sum_{i=0}^{k}{}'' (-1)^i T_i(y) = \frac{1}{2}(-1)^k (y-1) U_{k-1}(y). \tag{102}$$

Заменим сумму $\sum''$ в правой части (101) с помощью тождества (102) при $y = \cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}$, при этом правая часть (101) примет вид:

$$\frac{(-1)^k}{2}\Big[\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1} - 1\Big)\cdot U_{k-1}\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) + \cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}\Big]. \tag{103}$$

Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть получено по формуле (31). Подстановка этого значения, которое равно

$$\frac{\sin\dfrac{k(2j-1)\pi}{2k+1}}{\sin\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}},$$

приведет выражение в квадратных скобках в (103) к следующему виду:

$$\Big[\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\cdot\sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} +$$

$$+\sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\cdot\cos\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1}\Big]\Big(\sin\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)^{-1}.$$

Простые преобразования выражения в квадратных скобках дают:

$$\sin\frac{(k+1)(2j-1)\pi}{2k+1} - \sin\frac{k(2j-1)\pi}{2k+1} =$$

$$= 2\cos\Big(\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)\cdot\sin\frac{(2j-1)\pi}{2(2k+1)} = 0.$$

Значит, $Q_j(x_0) = 0$ при $j \neq 0$. Равенство $Q_0(x_l) = 0$ при $l \neq 0$ доказывается аналогично.

Случай 3. Пусть $l = j \neq 0$. Тогда

$$Q_j(x_j) = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}' \big[T_i^*(x_j)\big]^2 = \frac{4}{2k+1}\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j - 1). \tag{104}$$

Для вычисления суммы квадратов многочленов Чебышёва воспользуемся тождеством (65) из теоремы 2.9. в [3]:

$$\sum_{i=0}^{k} T_i^2(y) = \frac{1}{4}\big(U_{2k}(y) + 2k + 3\big). \qquad (105)$$

Преобразуем сумму со штрихом в (104) в сумму без штриха:

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j - 1) = \sum_{i=0}^{k} T_i^2(2x_j - 1) - \frac{1}{2}T_0^2, \qquad T_0 = 1.$$

Заменим сумму квадратов на равную ей правую часть из (105) при $y = 2x_j - 1$:

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j - 1) = \frac{1}{4}\Big[U_{2k}(2x_j - 1) + 2k + 3\Big] - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\Big[U_{2k}(2x_j - 1) + 2k\Big] + \frac{1}{4}. \quad (106)$$

Учтем, что $2x_j - 1$ есть нечетный корень многочлена Чебышёва второго рода U_{2k}. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(2x_j - 1) = \frac{2k+1}{4}\,. \qquad (107)$$

Подставляя полученную сумму (107) в (104), имеем

$$Q_j(x_j) = 1 \quad \text{при} \quad j \neq 0.$$

Случай 4. Пусть $l = j = 0$. Как и в третьем случае, здесь будет выполняться равенство (106). Значение многочлена Чебышёва второго рода может быть найдено из (36):

$$U_{2k}(-1) = 2k + 1.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k}{}' T_i^2(-1) = \frac{4k+1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{2}\,.$$

Подставляя полученную сумму в (104), получаем

$$Q_0(x_0) = 2.$$

Напомним, что многочлен $Q_0(x)$ входит в сумму (96) для $J_k(x)$ с дополнительным коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$.

Итак, мы доказали, что многочлены $Q_j(x)$ являются фундаментальными многочленами интерполирования, для которых выполняются следующие характеристические соотношения:

$$Q_j(x_l) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq l, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad l = 0, 1, \dots, k, \tag{108}$$

$$Q_j(x_j) = 1 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{109}$$

$$Q_0(x_0) = 2. \tag{110}$$

Из (108)–(110) следует, что многочлен $J_k(x)$, определенный формулой (89), удовлетворяет условиям

$$J_k(x_l) = f(x_l), \quad l = 0, 1, \dots, k, \tag{111}$$

где x_l задаются формулами (90), (91), и, следовательно, является интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (90), (91). Многочлен, определяемый по формуле (96), является интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$. Теорема доказана.

5.3. Зависимость между коэффициентами Чебышёва и их приближенными значениями, вычисленными по формуле Маркова. Формула (89) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $J_k(x)$:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' f(x_j) T_i^*(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, k. \tag{112}$$

Здесь x_j вычисляются по (90), (91), а символ $\sum'$ определен формулой (79) в п. 4. Установим зависимость коэффициентов Чебышёва $a_i^*[J_k]$ интерполяционного полинома $J_k(x)$ (89) функции $f(x)$ от коэффициентов Чебышёва самой функции.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ разложена в ряд Чебышёва*

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[f] T_i(x) \tag{113}$$

и многочлен $J_k(x)$ записан по формуле

$$J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] T_i^*(x),$$

где $a_i^*[J_k]$ *определены в* (112), *то*

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q \big(a^*_{q(2k+1)-i}[f] + a^*_{q(2k+1)+i}[f] \big), \qquad 0 < i \leqslant k,$$

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] + 2\sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q a^*_{q(2k+1)}[f].$$

Доказательство. Подставим в (112) разложение функции $f(x)$ в смещенный ряд Чебышёва (113). Получим

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}{}' \Big({\sum_{l=0}^{\infty}}{}' a_l^*[f] \cdot T_l^*(x_j) \Big) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поменяем местами порядок суммирования:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{l=0}^{\infty}}{}' a_l^*[f] {\sum_{j=0}^{k}}{}' T_l^*(x_j) T_i^*(x_j), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{114}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx, \qquad i, r = 0, 1, \ldots, k. \tag{115}$$

Так как $r + i \leqslant 2k$, то в квадратурной формуле Маркова (58) при $n = k$ и $f(x) = T_r^*(x) \cdot T_i^*(x)$ остаточный член обращается в нуль, т.е.

$$\int\limits_0^1 \frac{T_r^*(x) T_i^*(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \frac{2\pi}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j). \tag{116}$$

Здесь абсциссы x_j, $j = 0, 1, \ldots, k$, определены по (90), (91). В силу того, что смещенные многочлены Чебышёва $T^*(x)$ ортогональны на отрезке $[0, 1]$ с весом (10), левая часть (116), а следовательно, и правая часть (116) будут равны

$$\frac{2\pi}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}{}' T_r^*(x_j) T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ \pi & \text{при} \quad r = i = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' T_r^*(x_j)T_i^*(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \neq i, \\ 2 & \text{при} \quad r = i = 0, \\ 1 & \text{при} \quad r = i > 0. \end{cases} \tag{117}$$

Рассмотрим

$$T_l^*(x_j) = T_l(2x_j - 1) = T_l\Big(\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big) = \cos\frac{l(2j-1)\pi}{2k+1}\,.$$

Пусть $l = q(2k+1) \pm r$, где q и r — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда

$$T_l^*(x_j) = \cos\frac{\big[q(2k+1) \pm r\big](2j-1)\pi}{2k+1} = \cos\Big[q(2j-1)\pi \pm \frac{r(2j-1)\pi}{2k+1}\Big]\,.$$

Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$T_l^*(x_j) = \begin{cases} \cos\dfrac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если} \quad q \text{ — четное}, \\ -\cos\dfrac{r(2j-1)\pi}{2k+1}, & \text{если} \quad q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{118}$$

Косинус в правой части (118) равен $T_r^*(x_j)$. Таким образом, для произвольных целых неотрицательных чисел q и r справедливо равенство

$$T_{q(2k+1)\pm r}^*(x_j) = \begin{cases} T_r^*(x_j), & \text{если} \quad q \text{ — четное}, \\ -T_r^*(x_j), & \text{если} \quad q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{119}$$

Для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant r < 2k+1$, что

$$l = q(2k+1) + r. \tag{120}$$

Если $0 \leqslant r \leqslant k$, то положим $l = q(2k+1) + r$. Если $k < r$, то преобразуем (120) следующим образом:

$$l = \big[q(2k+1) + (2k+1)\big] - (2k+1) + r = (q+1)(2k+1) - (2k+1-r).$$

Обозначим $r_1 = 2k+1-r$. Тогда $0 < r_1 \leqslant k$ и $l = (q+1)(2k+1) - r_1$. Таким образом, для каждого $l \geqslant 0$ существуют такие целые числа $\bar{q} \geqslant 0$ и $-k \leqslant \bar{r} \leqslant k$, что

$$l = \bar{q}(2k+1) + \bar{r}, \tag{121}$$

где

$$\bar q = \begin{cases} q, & \text{если} \quad r \leqslant k, \\ q+1, & \text{если} \quad r > k, \end{cases} \qquad \bar r = \begin{cases} r, & \text{если} \quad r \leqslant k, \\ -r_1 = -(2k+1-r), & \text{если} \quad r > k. \end{cases} \tag{122}$$

Из (119) следует, что

$$T_l^*(x_j) = T^*_{\bar q(2k+1)+\bar r}(x_j) = \begin{cases} T^*_{|\bar r|}(x_j), & \text{если} \quad \bar q \text{ — четное}, \\ -T^*_{|\bar r|}(x_j), & \text{если} \quad \bar q \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{123}$$

Вернемся теперь к формуле (114) для коэффициента Чебышёва $a_i^*[J_k]$. Ввиду (117) для фиксированного $0 < i \leqslant k$ внутренняя сумма в (114) отлична от нуля только при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 2(2k+1)-i, \quad 2(2k+1)+i, \quad \dots,$$

т.е. при

$$l = i, \quad 2k+1-i, \quad 2k+1+i, \quad 4k+2-i, \quad 4k+2+i, \quad \dots.$$

Из (114), (123), (117) вытекает, что

$$a_i^*[J_k] = a_i^*[f] - a^*_{2k+1-i}[f] - a^*_{2k+1+i}[f] + a^*_{4k+2-i}[f] + a^*_{4k+2+i}[f] - \dots. \tag{124}$$

В частности, при $i = k$ внутренняя сумма в (114) отлична от нуля только при

$$l = k, \quad 2k+1-k, \quad 2k+1+k, \quad 2(2k+1)-k, \quad 2(2k+1)+k, \quad \dots$$

и

$$a_k^*[J_k] = a_k^*[f] - a^*_{k+1}[f] - a^*_{3k+1}[f] + a^*_{3k+2}[f] + a^*_{5k+2}[f] - \dots. \tag{125}$$

Ввиду (117) для $i = 0$, внутренняя сумма в правой части (114) отлична от нуля только при

$$l = 0, \quad 2k+1, \quad 2(2k+1), \quad 3(2k+1), \quad 4(2k+1), \quad \dots.$$

Из (114), (123), (117) получаем

$$a_0^*[J_k] = a_0^*[f] - 2a^*_{2k+1}[f] + 2a^*_{4k+2}[f] - 2a^*_{6k+3}[f] + 2a^*_{8k+4}[f] - \quad \dots. \tag{126}$$

Теорема доказана.

На основании формул (124), (126) можно сделать вывод о том, что если последовательность $\{a_i^*[f]\}$ достаточно регулярно стремится к нулю, то коэффициент

$$a_i^*[J_k] \approx a_i^*[f]$$

и имеет наибольшую абсолютную погрешность при $i = k$; эта погрешность меньше при $i = k-1, \ldots, 2, 1$; наименьшая погрешность у коэффициента $a_0^*[J_k]$.

6. О погрешности приближения функции частичной суммой ряда Чебышёва. Остаток $r_k(x,\, f)$ смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) + r_k(x, f) \tag{127}$$

имеет вид

$$r_k(x, f) = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^*[f] \cdot T_i^*(x). \tag{128}$$

Оценим этот остаток с помощью *неравенства Лебега*.

Преобразуем частичную сумму смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} S_k(x, f) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 p(\gamma) f(\gamma) T_i^*(\gamma) d\gamma \cdot T_i^*(x) = \\ = \int\limits_0^1 p(\gamma) f(\gamma) \Big(\frac{2}{\pi} {\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(\gamma) T_i^*(x) \Big) d\gamma, \end{aligned}$$

здесь

$$p(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}\,.$$

Обозначим

$$K_k(x, \gamma) = \frac{2}{\pi} {\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(x) T_i^*(\gamma). \tag{129}$$

Тогда

$$S_k(x, f) = \int\limits_0^1 p(\gamma) f(\gamma) K_k(x, \gamma)\, d\gamma. \tag{130}$$

Пусть $Q_k(x)$ — алгебраический многочлен наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[0, 1]$ степени не выше k. Преобразуем k-й остаток смещенного ряда Чебышёва:

$$r_k(x, f) = f(x) - S_k(x, f) = \big[f(x) - Q_k(x)\big] + \big[Q_k(x) - S_k(x, f)\big]. \tag{131}$$

Рассмотрим разность $f(x) - Q_k(x)$. Для любого $x \in [0,\ 1]$ справедливо неравенство

$$\bigl|f(x) - Q_k(x)\bigr| \leqslant E_k(f), \tag{132}$$

где $E_k(f)$ — *наилучшее равномерное приближение функции* $f(x)$ многочленом степени не выше k на сегменте $[0,1]$, или *погрешность наилучшего приближения степени* k. Оценим сверху погрешность наилучшего приближения. Для этого воспользуемся так называемыми прямыми теоремами о наилучших приближениях непрерывных функций алгебраическими многочленами. Приведем (без доказательства) одну из таких теорем

6.1. О порядке наилучшего равномерного приближения.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[a,\ b]$, то при $n > p$ справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_p}{n^p}\omega\Bigl(f^{(p)}, \frac{b-a}{2(n-p)}\Bigr),$$

где

$$c_p = \frac{1}{p!2^p}\beta^{p+1}p^p(b-a)^p, \qquad \beta = 3\pi + 1 < 11. \tag{133}$$

Здесь $\omega(f^{(p)},\ \delta)$ — модуль непрерывности p-й производной функции $f(x)$ на сегменте $[a,\ b]$ (доказательство теоремы см. в [4], гл. IX, § 6, теорема 9.10 или в [5], гл. XII, § 6, теорема 12.10).

Из этой теоремы следует, что если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a,\ b]$ $p+1$ раз, причем $(p+1)$-я производная удовлетворяет условию

$$\bigl|f^{p+1}(x)\bigr| \leqslant M_{p+1}$$

при $x \in [a,\ b]$, то

$$E_n(f) \leqslant \frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{n^p 2(n-p)} \leqslant \frac{c_p(b-a)M_{p+1}}{2n^p} \cdot \frac{p+1}{n}\,. \tag{134}$$

Подставив в (134) значение константы c_p из (133), получаем оценку

$$E_n(f) \leqslant \frac{\beta^{p+1}p^p(p+1)M_{p+1}}{2^{p+1}p!n^{p+1}}(b-a)^{p+1}, \qquad n > p. \tag{135}$$

(См. также теорему о порядке наилучшего равномерного приближения непрерывных функций, приведенную в гл. 4, § 5, стр. 363, 364 в [6]).

Еще одну оценку для погрешности наилучшего приближения можно получить, если обратиться к теории интерполирования.

Пусть $f(x)$ имеет на $[a,\, b]$ производную $(n+1)$-го порядка, причем

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M_{n+1}.$$

Напомним оценку погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа $L_n(x)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a,\, b]$, если в качестве узлов интерполирования взять числа

$$x_i = \frac{1}{2}\big[(b-a)\xi_i + b + a\big], \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где ξ_i являются корнями многочлена Чебышёва $T_{n+1}(\xi)$ на $[-1,\, 1]$. Оценка для этого случая будет такая:

$$\left|f(x) - L_n(x)\right| \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\,, \qquad x \in [a, b] \tag{136}$$

(см. гл. 2, § 3, п. 2, формула (4) в [6]). Но если неравенство (136) выполняется на всем отрезке $[a,\, b]$ для некоторого многочлена степени n, то оно тем более будет выполняться для многочлена наилучшего равномерного приближения степени n функции $f(x)$ на $[a,\, b]$. Таким образом, отсюда следует оценка сверху наилучшего равномерного приближения степени n на сегменте $[a,\, b]$, а именно:

$$E_n(f) \leqslant \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\,. \tag{137}$$

6.2. Оценки остаточного члена ряда Чебышёва. Теперь рассмотрим вторую разность в (131), а именно: разность между многочленом $Q_k(x)$ наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ и k-й частичной суммой ее смещенного ряда Чебышёва. Заметим, что многочлен $Q_k(x)$ совпадает с k-й частичной суммой своего ряда Чебышёва. Из интегрального представления частичной суммы (130) следует, что

$$Q_k(x) - S_k(x, f) = \int\limits_0^1 p(\gamma)\big[Q_k(\gamma) - f(\gamma)\big] K_k(x,\gamma)\, d\gamma, \qquad x \in [0, 1].$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\left|Q_k(x) - S_k(x, f)\right| \leqslant E_k(f) \cdot \int\limits_0^1 p(\gamma)\left|K_k(x,\gamma)\right| d\gamma. \tag{138}$$

Обозначим

$$L_k(x) = \int\limits_0^1 p(\gamma)\left|K_k(x,\gamma)\right| d\gamma = \int\limits_0^1 p(\gamma)\left|\frac{2}{\pi}{\sum_{i=0}^{k}}{}' T_i^*(x) T_i^*(\gamma)\right| d\gamma. \tag{139}$$

Величина $L_k(x)$ называется *функцией Лебега порядка k ортонормированной системы* $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,T_0^*(x)$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_n^*(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда неравенство (138) принимает вид

$$\bigl|Q_k(x) - S_k(x,f)\bigr| \leqslant E_k(f)L_k(x). \tag{140}$$

Из равенства (131) и неравенства (140) следует, что k-й остаток смещенного ряда Чебышёва функции $f(x)$ можно оценить сверху следующим образом:

$$\bigl|r_k(x,f)\bigr| \leqslant E_k(f)\bigl(1 + L_k(x)\bigr). \tag{141}$$

Неравенство (141) называется *поточечным неравенством Лебега.*

Преобразуем интеграл $L_k(x)$, применяя правило замены переменной. Положим

$$x = \cos^2\frac{u}{2}\,, \qquad \gamma = \cos^2\frac{t}{2}\,.$$

Тогда, учитывая, что $T_i^*(x) = T_{2i}(\sqrt{x})$, $x \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots$, получаем

$$T_i^*(x) = T_{2i}\Bigl(\cos\frac{u}{2}\Bigr) = \cos\Bigl(2i\cdot\frac{u}{2}\Bigr) = \cos iu, \qquad T_i^*(\gamma) = \cos it.$$

Так как $p(\gamma)d\gamma = -dt$, то из (139) находим

$$L_k\Bigl(\cos^2\frac{u}{2}\Bigr) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Bigl|{\sum_{i=0}^{k}}{}'\cos iu\cdot\cos it\Bigr|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Bigl|{\sum_{i=0}^{k}}{}'\bigl(\cos i(t-u) + \cos i(t+u)\bigr)\Bigr|\,dt. \tag{142}$$

Обозначим

$$D_k(v) = {\sum_{i=0}^{k}}{}'\cos iv. \tag{143}$$

Вспомогательная функция $D_k(v)$ называется *ядром Дирихле.* Тогда

$$L_k\Bigl(\cos^2\frac{u}{2}\Bigr) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\bigl|D_k(t-u) + D_k(t+u)\bigr|\,dt. \tag{144}$$

Найдем максимум функции Лебега. Из (144) имеем

$$L_k\Bigl(\cos^2\frac{u}{2}\Bigr) \leqslant \frac{1}{\pi}\Bigl(\int_0^{\pi}\bigl|D_k(t-u)\bigr|\,dt + \int_0^{\pi}\bigl|D_k(t+u)\bigr|\,dt\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-u}^{\pi-u} \big|D_k(v)\big|\,dv + \int\limits_{u}^{\pi+u} \big|D_k(v)\big|\,dv\Big). \tag{145}$$

Поскольку $D_k(v)$ является четной и периодической с периодом 2π функцией, то интеграл от $\big|D_k(v)\big|$ по сегменту $[-u,\,0]$ равен интегралу от этой функции по сегменту $[0,\,u]$, а интеграл по сегменту $[\pi,\,\pi+u]$ равен интегралу по сегменту $[\pi-u,\,\pi]$. Поэтому из (145) вытекает неравенство

$$L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \big|D_k(v)\big|\,dv. \tag{146}$$

Положим в (144) $u=0$, тогда

$$L_k(1) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \big|D_k(t)\big|\,dt.$$

Отсюда и из (146) следует соотношение для максимума функции Лебега:

$$L_k = \max_{u\in[0,\pi]} L_k\Big(\cos^2\frac{u}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \big|D_k(v)\big|\,dv. \tag{147}$$

Максимум функции Лебега порядка k называется *постоянной Лебега порядка* k. Для интеграла (147) известна асимптотика (см., например, формулу (31) из § 7 в [3] или гл. III, § 4 в [5])

$$L_k = \|L_k(x)\|_\infty = \frac{4}{\pi^2}\ln k + O(1), \qquad k\to\infty. \tag{148}$$

Оценка (148) дает скорость возрастания постоянных Лебега для смещенных многочленов Чебышёва с ростом k.

Таким образом, постоянные Лебега для рядов Чебышёва возрастают со скоростью $\ln k$. Из (141) находим

$$\big|r_k(x,f)\big| \leqslant (1+L_k)E_k(f). \tag{149}$$

Неравенство (149) называется *неравенством Лебега для рядов Фурье–Чебышёва.*

Из неравенства Лебега (149) с учетом (148) имеем оценку

$$\|r_k(x,f)\|_\infty \leqslant c_1\cdot\ln k\cdot E_k(f), \qquad c_1=\mathrm{const}. \tag{150}$$

6.3. Суммарная погрешность вычисленного ряда Чебышёва. Оценим суммарную погрешность вычисленного ряда Чебышёва, складывающуюся из остаточного члена ряда Чебышёва и ошибок в приближенных значениях его коэффициентов. Для этого выразим коэффициенты Чебышёва, входящие в частичную сумму ряда (127), по квадратурной формуле Маркова (80) с остаточным членом (81) при $n = k$. С учетом обозначений, принятых в (89), (112), имеем

$$f(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' \big(a_i^*[J_k] + R_i\big) T_i^*(x) + r_k(x, f) = J_k(x) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f), \quad (151)$$

где

$$J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] \cdot T_i^*(x), \quad (152)$$

$$R_i = R(f \cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}} \frac{(f \cdot T_i^*)^{(2k+1)}(\eta)}{(2k+1)!} = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!} \sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^{l} f^{(2k+1-l)}(\eta) \cdot T_i^{*(l)}(\eta). \quad (153)$$

Отсюда

$$f(x) - J_k(x) = {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(x) + r_k(x, f). \quad (154)$$

Поскольку многочлен $J_k(x)$, определяемый формулой (89) или, что то же самое, формулами (152) и (112), является одновременно интерполяционным полиномом для функции $f(x)$ с узлами интерполирования (90), (91), совпадающими с корнями многочлена $\frac{1}{\alpha_k} x\Pi_k(x)$ (α_k задается формулой (23) при $n = k$), то для оценки разности $f(x) - J_k(x)$ можно воспользоваться хорошо известным выражением остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (см. гл. 2, § 3, п. 1, формула (1) в [6] или гл. II, § 3, формула (1) в [7]). В нашем случае эта формула примет вид:

$$f(x) - J_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \frac{x\Pi_k(x)}{\alpha_k} = \frac{(-1)^k \sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}} \frac{f^{(k+1)}(\xi) x\Pi_k(x)}{(k+1)!}, \quad \xi \in [0, \max\{x, x_1\}]. \quad (155)$$

Приведем пример использования вышеизложенных оценок. Рассмотрим задачу Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X. \quad (156)$$

Допустим, что правая часть $f(x,\, y,\, y')$ дифференциального уравнения имеет в рассматриваемой области изменения аргументов x, y, y' непрерывные ограниченные частные производные по аргументам x, y, y' $(p+1)$-го порядка. Тогда функция $F(x) = f\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big)$ имеет непрерывную ограниченную производную порядка $p+1$ на $[x_0,\, x_0+X]$, т.е. выполняется условие

$$\left|F^{(p+1)}(x)\right| \leqslant M_{p+1}, \qquad x \in [x_0, x_0+X].$$

Мы обсуждаем решение задачи Коши (156) на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$, $h \leqslant X$. На этом сегменте правую часть уравнения (156), взятую на решении задачи, рассмотрим как функцию переменной α:

$$F(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big) = F(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad \alpha \in [0,1]. \tag{157}$$

Функция $\Phi(\alpha)$ имеет на $[0,1]$ непрерывную ограниченную производную до $(p+1)$-го порядка включительно. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\Phi^{(p+1)}(\alpha) = h^{p+1}F^{(p+1)}(x)$$

и

$$\left|\Phi^{(p+1)}(\alpha)\right| \leqslant h^{p+1}M_{p+1}. \tag{158}$$

Применим оценку сверху (135) для наилучшего приближения функции $\Phi(\alpha)$ на отрезке $[0,1]$ при $n=k>p$:

$$E_k(\Phi) \leqslant \frac{\beta^{p+1}p^p(p+1)M_{p+1}}{2^{p+1}p!k^{p+1}}\, h^{p+1}, \qquad k>p. \tag{159}$$

Аналогично оценка (137), применимая к $\Phi(\alpha)$ при $n=k=p$, дает неравенство

$$E_k(\Phi) \leqslant \frac{M_{k+1}h^{k+1}}{2^{2k+1}(k+1)!}\,. \tag{160}$$

Очевидно, что применение оценок (135) и (137) к функции $\Phi(\alpha)$ на сегменте $[0,1]$ равносильно их применению к функции $F(x)$ на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$.

Оценка (159) дает порядок стремления $E_k(F)$ к нулю при $k \to \infty$. Она же и оценка (160) показывают порядок наилучшего равномерного приближения $E_k(F)$ относительно длины h частичного отрезка $[x_0,\, x_0+h]$ при $h \to 0$.

Правую часть уравнения (156), взятую на решении задачи и рассматриваемую как функция переменной α

$$F(x) = f\big(x, y(x), y'(x)\big) = F(x_0+\alpha h) = \Phi(\alpha), \qquad a \in [0,1],$$

аппроксимируем k-й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (159), из (150) получаем неравенство для остаточного члена

$$r_k(\alpha, \Phi) = r_k\big(x_0 + \alpha h, F(x_0 + \alpha h)\big) = r_k(x, F)$$

ряда Чебышёва правой части этого уравнения

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\big|r_k(\alpha, \Phi)\big| = \max_{x\in[x_0,x_0+h]}\big|r_k(x, F)\big| \leqslant \frac{c_p M_{p+1} \ln k}{k^{p+1}}\, h^{p+1}, \qquad k > p, \tag{161}$$

где c_p — постоянная, зависящая от p и не зависящая от k.

Из (161) видно, что если функция $F(x)$ достаточно гладкая, то $r_k(x, F)$ стремится к нулю очень быстро при $k \to \infty$. Используя оценку наилучшего равномерного приближения (160), из (150) имеем

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\big|r_k(\alpha, \Phi)\big| = \max_{x\in[x_0,x_0+h]}\big|r_k(x, F)\big| \leqslant \frac{c_1 M_{k+1} \ln k}{2^{2k+1}(k+1)!}\, h^{k+1}. \tag{162}$$

Оценки (161), (162) показывают также порядок остаточного члена ряда Чебышёва функции $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h)$ (157) относительно длины частичного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$ при $h \to 0$.

Формула (151) для функции $\Phi(\alpha)$ принимает вид:

$$\Phi(\alpha) = J_k(\alpha) + {\sum_{i=0}^{k}}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{163}$$

Заметим, что, как следует из (153), при $h \to 0$ имеет место асимптотическая оценка $R_i = O(h^{2k+1-i})$; в частности, $R_k = O(h^{k+1})$. Поэтому второе слагаемое в (163) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$, т.е.

$$\Big\|{\sum_{i=0}^{k}}{}' R_i T_i^*(\alpha)\Big\|_\infty = O(h^{k+1}). \tag{164}$$

Из (163) имеем

$$\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\| \leqslant \Big\|{\sum_{i=0}^{k}}{}' R_i T_i^*(\alpha)\Big\| + \|r_k(\alpha, \Phi)\|.$$

Отсюда, а также из (162) и (164) следует оценка погрешности аппроксимации функции $\Phi(\alpha)$ (157) частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по квадратурной формуле Маркова, а именно:

$$\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\|_\infty = O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{165}$$

Выражение остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа (155) для функции $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, принимает вид

$$\Phi(\alpha) - J_k(\alpha) = \frac{(-1)^k\sqrt{2\pi}}{2^{2k+1}}\frac{h^{k+1}F^{(k+1)}(x_0 + \xi h)\alpha\Pi_k(\alpha)}{(k+1)!}\,. \tag{166}$$

Видно, что правые части в (165) и (166) имеют один и тот же порядок относительно длины h частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
2. *С*правочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абромовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2007.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
7. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.